

1/a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3^{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3 \cdot 9^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 9^n \cdot \left(\left(\frac{5}{9}\right)^n - 3\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty \cdot (0 - 3) = -\infty$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ pro $a \in (0, 1)$

$$1/b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1 + 0 = 1$$

$$1/c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n} + 2n}{n! + \sqrt{n}} =$$

kdy bychom použili VoAL, dostali bychom $\frac{\infty}{\infty}$, což není definovaný výraz. Musíme na to jít jinak.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{2n}}{n! + \sqrt{n}} + \frac{2n}{n! + \sqrt{n}} \right)$$

Dle růstové škály: $a^n \ll n!$, tedy $3^{2n} = 9^n \ll n! + \sqrt{n}$. Proto 1. zlomek jde do 0.

$$\frac{2n}{n! + \sqrt{n}} = \frac{n \cdot 2}{n \cdot (n-1)! + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{(n-1)! + \frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\text{VoAL}} \frac{2}{\infty + 0} = 0$$

Oba zlomky jdou do 0. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n} + 2n}{n! + \sqrt{n}} = 0$

$$1/d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 + 7n^3 - 5}{50n^5 - 24n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \left(6 + 7 \frac{1}{n^3} - \frac{5}{n^6}\right)}{n^5 \left(50 - \frac{24}{n^3}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(6 + \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^6}\right)}{50 - \frac{24}{n^3}} =$$

$$\stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{\infty(6+0-0)}{50-0} = \underline{\underline{\infty}}$$

$$1, e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 7^n + n^3 5^n}{-3n 7^n + \sqrt{n} 6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (1 + n^3 (\frac{5}{7})^n)}{n (-3 + \frac{\sqrt{n}}{n} (\frac{6}{7})^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (1 + n^3 (\frac{5}{7})^n)}{n (-3 + \frac{\sqrt{n}}{n} (\frac{6}{7})^n)} =$$

OK, PS defin.

$$\text{VOAL} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\frac{5}{7})^n)}{(-3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} (\frac{6}{7})^n)} \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{-3} = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (\frac{5}{7})^n = 0 \text{ (díky reistové škále)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} (\frac{6}{7})^n = 0$$

$$1, f) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1}) \cdot \frac{(n^2 + 2)^{5/2} + (n^2 + 2)^2 (n^3 + 1)^{1/3} + \dots + (n^3 + 1)^{5/3}}{[A^6 - B^6 = (A - B)(A^5 + A^4 B + A^3 B^2 + A^2 B^3 + A B^4 + B^5)]} \uparrow \text{dlouhá jehlička}$$

$$\hookrightarrow \text{vezmeme } A = \sqrt{n^2 + 2} \quad B = \sqrt[3]{n^3 + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot ((n^2 + 2)^3 - (n^3 + 1)^2)}{n^5 \cdot ((1 + \frac{2}{n^2})^{5/2} + (1 + \frac{2}{n^2})^2 (1 + \frac{1}{n^3})^{1/3} + \dots + (1 + \frac{1}{n^3})^{5/3})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n^6 + 3n^4 \cdot 2 + 3n^2 \cdot 4 + 8 - n^6 - 2n^3 - 1)}{n^5 \cdot ((1 + \frac{2}{n^2})^{5/2} + \dots + (1 + \frac{1}{n^3})^{5/3})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 (6 + \frac{12}{n^2} + \frac{8}{n^4} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^4})}{n^5 ((1 + \frac{2}{n^2})^{5/2} + \dots + (1 + \frac{1}{n^3})^{5/3})}$$

$$\text{VOAL} \frac{6}{6} = 1, \text{ protože všechny členy } \frac{c}{n^a} \rightarrow 0, c \text{ konstanta, } a \in \mathbb{N}$$

↑ podle počtu sčítanců v

$$1, g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + m \sin(2m)}{n \cos(3m) + 4n^2 + 4m \sin(4m) + \sin^2(4m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (2 + \frac{2}{n} + \frac{\sin(2m)}{n})}{n^2 (\frac{\cos(3m)}{n} + 4 + \frac{4 \sin(4m)}{n} + \frac{\sin^2(4m)}{n^2})} =$$

$$\text{VOAL} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0, \text{ jasně! } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2m)}{n} = 0 \text{ a věty o mizející a omezení posl.,}$$

$$\text{podobně pro } \frac{\cos(3m)}{n}, \frac{4 \sin(4m)}{n} \text{ a } \frac{\sin^2(4m)}{n^2}$$

$$2) a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0 \text{ dle r\u00e1stov\u00e9 sk\u00e1ly}$$

$$2) b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{(5,00001)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{5,00001} \right)^n + \left(\frac{2}{5,00001} \right)^n + \left(\frac{3}{5,00001} \right)^n + \left(\frac{4}{5,00001} \right)^n + \left(\frac{5}{5,00001} \right)^n \right)$$

$$\text{VoAL} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ pro } a \in (0, 1)$$

$$2) c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)}{3^{n+1} \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3} \right)^n + 1}{3 \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right)} =$$

$$\text{VoAL} = \frac{0 + 1}{3(0 + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$2) d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{n^7 + n \cdot n!} + \frac{1}{n^2 + \frac{n!}{n^5}} + \frac{(n+1)n!}{n^7 + n \cdot n!} \right)$$

$\text{r\u00e1stov\u00e1 sk\u00e1la} \downarrow 0$
 $\downarrow \text{r. \u0161.} \frac{1}{\infty + \infty} = 0$
 $L = \frac{n! + n \cdot n!}{n^7 + n \cdot n!} =$

$$\text{VoAL} = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$2) e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 2^n + 3^n}$$

$$\frac{1}{0 + \infty} = 0 \quad \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^4 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{3} \rightarrow 3$$

$$\text{V\u011bt\u00e1 o 2 stran\u00edn\u00edch} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 2^n + 3^n} = 3$$

$\sqrt[n]{3} \rightarrow 1$

~~$$2) f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n(3-2)}}{\left(3^{\frac{n-1}{n}} + 3^{\frac{n-2}{n}} \cdot 2 + 3^{\frac{n-3}{n}} \cdot 2^2 + \dots + 3^{\frac{2}{n}} \cdot 2^{\frac{n-2}{n}} + 2^{\frac{n-1}{n}} \right)}$$~~

$$2) f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{3^{\frac{n-1}{n}} + 3^{\frac{n-2}{n}} 2^{\frac{1}{n}} + \dots + 3^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{n-2}{n}} + 2^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

platí: $3^{\frac{n-j}{n}} = \sqrt[n]{3^{n-j}} \geq \sqrt[n]{2^{n-j}} \quad \text{pro } j = 1, \dots, n-1$

tedy

$$0 \leq \sqrt{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) \leq \frac{\sqrt{n}}{n \cdot 2^{\frac{n-1}{n}}}$$

(zmenšující jmenovatele
zvětšujeme 2. člen)

$$= \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{\frac{2^n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \frac{2}{\sqrt[n]{2}}} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \frac{1}{\infty \cdot \frac{2}{1}} = 0$$

Vo 2 stránkách

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = 0$$

2) g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^m + n} - n)$. vzorček
✓ $A^n - B^n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n^m + n - n^m) \cdot \frac{(n^m + n)^{\frac{n-1}{m}} + n \cdot (n^m + n)^{\frac{n-2}{m}} + \dots + (n^m + n)^{\frac{1}{m}} n^{n-2} + n^{n-1}}{(n^m + n)^{\frac{n-1}{m}} + n \cdot (n^m + n)^{\frac{n-2}{m}} + \dots + n^{n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{n-1} \cdot \underbrace{\left((1 + \frac{1}{n^m})^{\frac{n-1}{m}} + (1 + \frac{1}{n^m})^{\frac{n-2}{m}} + \dots + 1 \right)}_{n \text{ sčítanců}}} = 0.$$

2 strážníci

2) h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}} \stackrel{(*)}{=}$

upravíme odmenočky do vzorce: $\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n} = \frac{3^n + 2 \cdot 2^n - 3^n - 2^n}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}} =$

$$= \frac{2^n}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}}.$$

Odhadneme jmenovatele $\sqrt{3^n} \leq \sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n} \leq 2 \cdot \sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} \leq$

$$\leq 2 \cdot \sqrt{3^n + 2 \cdot 3^n} \leq 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^n}$$

Ověříme podmínky věty o dvou strážnicích pro $a_n = \sqrt{3^n}$, $b_n = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^n}$

a $c_n = \sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^n}} = \sqrt{3}.$$

Pak z věty o ar. limitě a věty o dvou strážnicích máme:

2) i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{2}{n})^n + (1 - \frac{2}{n})^n}$

Odhadneme $\sqrt[n]{(1 + \frac{2}{n})^n} \leq \sqrt[n]{(1 + \frac{2}{n})^n + (1 - \frac{2}{n})^n} \leq \sqrt[n]{2(1 + \frac{2}{n})^n}.$

Take' $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{2}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$

a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2(1 + \frac{2}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ VOAL OK, PS def

Z věty o dvou strážnicích, pak máme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{2}{n})^n + (1 - \frac{2}{n})^n} = 1$$

2) j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[n]{4^n + \sqrt{n}}}$

Odhadneme čitatele $\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}.$

Z věty o dvou strážnicích pak: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3.$

Odhadneme čitatele $\sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + \sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 4^n}.$

Z věty o dvou strážnicích pak: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + \sqrt{n}} = \sqrt{4}.$

Z předchozího a VOAL: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[n]{4^n + \sqrt{n}}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

$$2, k) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + 2\sqrt[n]{n}} =$$

neobíbe spočítame: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \sqrt[n]{n}}{n^3 + 2\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \frac{2\sqrt[n]{n}}{n^3}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0.$

z věty o omezení a mizející posloupnosti máme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + 2\sqrt[n]{n}} = 0$$

$$2, l) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1)^{n+1}}{(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 3n^2)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+1)^{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1} \cdot n^{n+1} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n+1}}{3^{n+1} n^{n+1} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{3n}\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{3n}\right)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} = 1$ (mapi. z věty 6 a korzi 4)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ (_____ " _____)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)} = 1$ (opakování použití VOAL)
- a $1 \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{3n}\right)} \leq \sqrt[n]{4}$, tj. z věty
o dvou střídmicích $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{3n}\right)} = 1$

$$3) a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n + 1}{2} \right)$$

$\downarrow$ -dle 4. cv. 1, j) $\rightarrow = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(-1)^n}_{\text{k ničemmu nekonverguje (4. cv. 1, 4)}} + \frac{1}{2}$

$\Downarrow$
limita neexistuje

$$3) b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{1}{2}$$

$$3) c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} 1$$

$\uparrow$
 2. cv. 1, d)

$$3, d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

použijeme odhad $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Zaroveň také $0 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$.

z věty o dvou střímcích:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} = 0, \text{ neboť } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$$

$$3, e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \stackrel{(*)}{=}$$

Předpokládejme $a \geq b \geq c$, jinak stáčí změnit značení,
pak odhadneme $\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3a^n}$,

přičemž: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3a^n} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = a$.

Tedy z věty o dvou střímcích $\stackrel{(*)}{=} \underline{\underline{a}}$

$$3, f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^n}}{a^2 \sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^{2n}}} = \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^n}}{\sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^{2n}}} \stackrel{(*)}{=}$$

Odhadneme $1 \leq \frac{\sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^n}}{\sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^{2n}}} \leq \frac{\sqrt[n]{1+1}}{\sqrt[n]{1}} = \sqrt[n]{2}$,

přičemž $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Tedy z věty o dvou střímcích $\stackrel{(*)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{a}}}$

$$4) a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = e^3$$

↑
0 posl. s kladnými členy

$$4) b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \text{ pro } x_n \rightarrow \infty$$

(je v teorii ke cr. 5)

$$\begin{aligned}
 4, c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{k} \right)^k}{\left(1 - \frac{2}{k} \right)} = \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{k}{2}} \right)^k \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{k} \right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{k}{2}} \right)^{\frac{k}{2} \cdot (-2)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{k} \right)} \stackrel{\text{index}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{k}{2}} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{k} \right)} \stackrel{\text{index}}{=} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{k}{2}} \right)^{\frac{k}{2}} \right)^{-2} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{k} \right)} = e^{-2} \cdot 1 = e^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4, c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-1} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1+1} \right)^{-1} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{-1} \stackrel{\text{VAL}}{=} e^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4, d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}} \\
 \text{Pak zřejmě } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} &= e, \text{ le tedy máme } m_0, \\
 \text{že } \forall n \geq m_0: \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} &< 42. \\
 \text{Zaroveň } 1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} &, \text{ ale také } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1 \\
 \text{a } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{42} &= 1, \text{ tedy z věty o dvou střípnících:} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}} &= \underline{\underline{1}}
 \end{aligned}$$

5) a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor} =: a_n$$

Použijeme $x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ a větu o 2 střednících

$\Downarrow$

$$\frac{n + (\sqrt[3]{n} - 1)^3}{n - (\sqrt{n+9} - 1)} = \frac{n + n - 3\sqrt[3]{n^2} + 3\sqrt[3]{n} - 1}{n + 1 - \sqrt{n+9}} \leq a_n \leq \frac{n + n}{n - \sqrt{n+9}}$$

$$= \frac{n(2 - 3\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}})}$$

$\downarrow$ L'Hôpital

$$\frac{2 - 0 + 0 - 0}{1 + 0 - 0} = 2$$

$\downarrow$ L'Hôpital
2

Tedy limita je 2

5) b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$$

Stějšim způsobem

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) = \frac{x}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{x(n+1)n}{2n^2} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$\downarrow$ $\frac{1}{2} \cdot x$

$\downarrow$ $\frac{x}{2}$
 $\downarrow$ 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor = \frac{x}{2}$$

5, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt[n]{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt[n]{n} \rfloor} =: C_n$

Odhadneme: $\lfloor \sqrt{m} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{m} \rfloor + \dots + \lfloor m\sqrt{m} \rfloor \geq \sqrt{m} - 1 + 2\sqrt{m} - 1 + \dots + m\sqrt{m} - 1 = \sqrt{m} \frac{m(m+1)}{2} - m$

a) Lebesgue: $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor m\sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} + 2\sqrt{n} + \dots + m\sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{m(m+1)}{2}$ symmetry reverses

Doktrina dy: $\frac{\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{a_n'' \frac{n+1}{2}} \leq \frac{n \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt[n]{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt[n]{n} \rfloor} \leq \frac{n \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt[n]{n} \frac{n(n+1)}{2} - n}.$

Chceme použiť reťaz o dvoch stĺpcoviciach, musíme spočítať limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n + n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$

Znovu chceme aplikovat dva strážníky:

$$2^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{1} \leq 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{1 + n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} \leq 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{1+n} \leq 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{2n}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$ $\downarrow n \rightarrow \infty$

2 2

bedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{n}^{\frac{1}{2}} \sqrt{(n+1)^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{n} \cdot (n+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)})} \stackrel{\text{LOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)}} = 2$$

Pak $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (z odhadů nahore)
a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, tedy z věty o dvou střížnicích.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$$

6) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ pro $a > 1$

ověříme definici: zvol. $K \in \mathbb{R}$

stačí najít $n \in \mathbb{N}$: $a^n > K$ (pak pro $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$: $a^m \geq a^n > K$)

$\downarrow / \log_a$ ($a > 1$, tedy $\log_a$ roste)

$$n \log_a a = n > \log_a K$$

takové n $\exists$ dle Archimédovy vl.

6) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ pro $a \in (0, 1)$

Zřejmě $\forall n \in \mathbb{N}$: $a^n > 0$. Stačí dokázat, že $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m_0$: $a^n < \varepsilon$
zvol. $\varepsilon > 0$

chci najít $n \in \mathbb{N}$: $a^n < \varepsilon$ (zbytek plyne z toho, že $\forall n' \geq n$: $a^{n'} \leq a^n < \varepsilon$)

$\downarrow / \log_a$ ($a < 1 \Rightarrow \log_a$ klesá)

$$n \log_a a = n > \log_a \varepsilon$$

- takové n $\exists$ dle Archimédovy vl.

6) c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

• posl. je klesající - k tomu stačí ukázat, že $a_n - a_{n+1} > 0$ (pak $a_n > a_{n+1}$)

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n!}{n^n} - \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n! (n+1)^{n+1} - n^n (n+1)!}{n^n (n+1)^{n+1}}$$

$$n! (n+1)^{n+1} - n^n (n+1)! = (n+1)! ((n+1)^n - n^n) > 0$$

tedy $a_n - a_{n+1} > 0$, neb $n+1 > n$

• stačí dok.: $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{n!}{n^n} < \varepsilon$ (jelikož je posl. klesající, tak pak $\forall n' \geq n$: $\frac{n'!}{n'^{n'}} < \varepsilon$)
stačí dokázat, že $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$

↳ snadno se ukáže, že ta nerovnost platí i pro všechna větší n

a od určitého n pak bude platit, že $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$n! < n^{n-1}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

↳ zřejmě platí $n^{n-1} = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$

$$6)d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{ pro } a > 0$$

stačí dokázat: $\frac{a^n}{n!}$ je klesající a $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}: \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$

↳ stačí klesající od určitého indexu

• posl. je klesající:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{a^n}{n!} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)a^n - a^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(n+1)a^n - a^{n+1} > 0$$

$$(n+1)a^n > a^{n+1}$$

$$n > \frac{a^{n+1}}{a^n} - 1 = a - 1 \quad | \text{ze z Archimédova vl.}$$

označíme $n_0 \in \mathbb{N}$ t.j. $n_0 > a > a - 1$

• zvol. $\varepsilon > 0$

chci: $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, podobně jako dříve stačí: $\frac{a^n}{n!} < \frac{1}{3}$

$$a^n < (n-1)!$$

$$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$\text{mať } n_1 \in \mathbb{N}: a^{n_0} < n_1, \quad a < n_1 + 1$$

$$\text{Pak } a^{n_1} = a^{n_0} \cdot a^{n_1 - n_0} < n_1 \cdot a^{n_1 - n_0} < n_1 \cdot n_0^{n_1 - n_0} \leq (n_1 + 1)^{n_0} \cdot (n_0 + 1) \cdot \dots \cdot (n_0 + n_1 - n_0 - 1) \\ \cdot n_1 \cdot \dots \cdot n_0 < n_1!$$

$$a^{n_1} < n_1! \quad a < n_1 + 1$$

$$\text{tedy } a^{n_1+1} < (n_1+1)! \quad | : (n_1+1)$$

$$a^{n_1+1} < \frac{a^{n_1+1}}{n_1+1} < n_1! \quad , \text{ což jsme chtěli}$$

6, e, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0, a > 1, b > 0$

Věta o posloupnosti s kladnými členy, druhá odražka:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^b}{a^{n+1}}}{\frac{n^b}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{n^b (1 + \frac{1}{n})^b}{n^b} = \frac{1}{a} < 1$$

Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

6, f, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Věta o posl. s kladnými členy, první odražka:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

6, g, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$.

Věta o posl. s kladnými členy, první odražka:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

6, h, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1, a > 0$.

Už víme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Podle věty o posl. s kladnými členy, třetí odražka:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^a = 1^a = 1$$